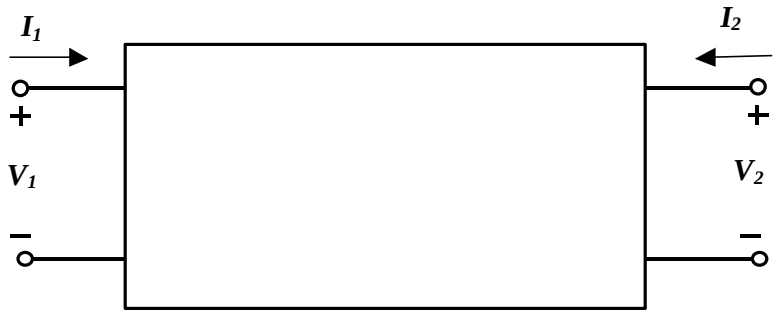
✓ *Revisão de quadripolos*

Antes de realizarmos alguns exemplos de circuitos realimentados, vamos rapidamente fazer um resumo de quadripolos.

Um quadripolo é uma estrutura com dois acessos um de entrada e outro de saída. Muitos equipamentos, dispositivos e configurações de componentes passivos podem ser representados por quadripolos. Um transistor, que tem três terminais, também é considerado quadripolo onde um dos terminais é comum ao acesso de entrada e o de saída.

A figura abaixo mostra a representação do quadripolo.



Quadripolo

Dependendo da escolha das variáveis independente, o quadripolo pode ser representado por vários tipos de matriz que relacionam as quatro variáveis da estrutura. As quatro matrizes mais importantes são descritas adiante.

Matriz Y *- Se escolhermos as tensões V_1 e V_2 como variáveis independentes então a matriz formada é de admitância (Y), ou seja*

$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{V}$ *onde* $\boldsymbol{I}$ *é um vetor coluna* $\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$ *e* $\boldsymbol{V}$ *é o vetor coluna* $\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$ *e* $\boldsymbol{Y}$ *é a matriz de admitância ou matriz Y do quadripolo:*

$$\boldsymbol{Y} = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}$$

Assim, a primeira das equações

$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$ *e a segunda equação*

$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2$

onde

$Y_{11} = I_1/V_1 \Big|_{V2=0}$ ***[admitância de entrada (inverso da impedância) com saída em curto]***

$Y_{12} = I_1/V_2 \Big|_{V1=0}$ ***[admitância reversa (inverso da transcondutância) com entrada em curto]***

$Y_{21} = I_2/V_1 \Big|_{V2=0}$ ***[admitância direta (inverso da transcondutância) com saída em curto]***

$Y_{22} = I_2/V_2 \Big|_{V1=0}$ ***[admitância de saída(inverso da impedância) com entrada em curto]***

Obs: Na conexão de realimentação de tensão em paralelo que significa amostrar a tensão na saída e realimentar como corrente na entrada ($b = I_2/V_1 = Y_{21}$) usamos esta matriz. O termo Y_{12} é sempre desprezado.

Matriz Z - *Se escolhermos as correntes I_1 e I_2 como variáveis independentes então a matriz formada é de impedância (Z), ou seja,*

$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\,\mathbf{I}$ *onde* $\mathbf{I}$ *é um vetor coluna* $\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$ *e* $\mathbf{V}$ *é o vetor coluna* $\begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$ *e* $\mathbf{Z}$ *é a matriz de impedância ou matriz Z do quadripolo:*

$$\mathbf{Z} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}$$

Assim, a primeira das equações

$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$ *e a segunda equação*

$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$ *onde*

$Z_{11} = V_1/I_1 \Big|_{I2=0}$ ***[impedância de entrada com saída aberta]***

$Z_{12} = V_1/I_2 \Big|_{I1=0}$ ***[transimpedância reversa com entrada aberta]***

$Z_{21} = V_2/I_1 \Big|_{I2=0}$ ***[transimpedância (ou transresistência) direta com saída aberta]***

$Z_{22} = V_2/I_2 \Big|_{I1=0}$ ***[impedância de saída com entrada aberta]***

Obs: Na conexão de realimentação de corrente em série que significa amostrar a corrente na saída e realimentar como tensão na entrada ($b = V_2/I_1 = Z_{21}$) usamos esta matriz. O termo Z_{12} é sempre desprezado.

Matriz G *- Se escolhermos a corrente de entrada I_1 e a tensão de saída V_2 como variáveis independentes então a matriz formada é híbrida (H), ou seja*

$\mathbf{V_I} = \mathbf{G}\,\mathbf{I_V}$ *onde* $\mathbf{I_V}$ *é um vetor coluna* $\begin{vmatrix} I_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$ *e* $\mathbf{V_I}$ *é o vetor coluna* $\begin{vmatrix} V_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$ *e* $\mathbf{G}$ *é a matriz de híbrida ou matriz G do quadripolo:*

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}$$

Assim, a primeira das equações

$V_1 = G_{11}I_1 + G_{12}V_2$ *e a segunda equação*

$I_2 = G_{21}I_1 + G_{22}V_2$ *onde*

$G_{11} = V_1/I_1 \big|_{V2=0}$ ***[impedância de entrada com saída em curto]***

$G_{12} = V_1/V_2 \big|_{I1=0}$ ***[ganho de tensão inverso com entrada aberta]***

$G_{21} = I_2/I_1 \big|_{V2=0}$ ***[ganho de corrente direto com saída em curto]***

$G_{22} = I_2/V_2 \big|_{I1=0}$ ***[admitância de saída (inverso de impedância) com entrada aberta]***

Obs: Na conexão de realimentação de corrente em paralelo que significa amostrar a corrente na saída e realimentar como corrente na entrada (b = $I_2/I_1 = G_{21}$) usamos esta matriz. O termo G_{12} é sempre desprezado.

Matriz H *- Se escolhermos a tensão de entrada V_1 e a corrente de saída I_2 como variáveis independentes então a matriz formada é híbrida inversa (G), ou seja*

$\mathbf{I_V} = \mathbf{H}\mathbf{V_I}$ *onde* $\mathbf{I_V}$ *é um vetor coluna* $\begin{vmatrix} I_1 \\ V_2 \end{vmatrix}$ *e* $\mathbf{V_I}$ *é o vetor coluna* $\begin{vmatrix} V_1 \\ I_2 \end{vmatrix}$ *e* $\mathbf{H}$ *é a matriz de híbrida ou matriz H do quadripolo:*

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}^{-1} = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}$$

Assim, a primeira das equações

$I_1 = H_{11}V_1 + H_{12}I_2$ *e a segunda equação*

$V_2 = H_{21}V_1 + H_{22}I_2$ *onde*

$H_{11} = I_1/V_1 \big|_{I2=0}$ *[admitância (inverso de impedância) de entrada com saída aberta]*

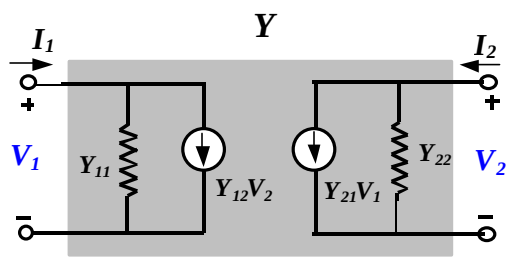
$H_{12} = I_1/I_2 \big|_{V1=0}$ *[ganho de corrente inverso com entrada em curto]*

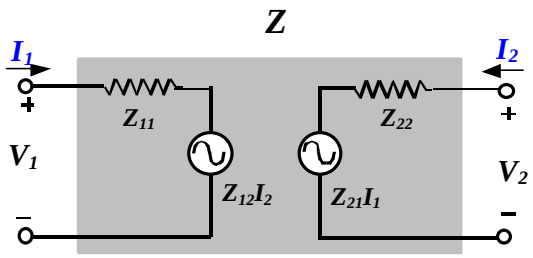
$H_{21} = V_2/V_1 \big|_{I2=0}$ *[ganho de tensão direto com saída aberta]*

$H_{22} = V_2/I_2 \big|_{V1=0}$ *[impedância de saída com entrada em curto]*

Obs: Na conexão de realimentação de tensão em série que significa amostrar a tensão na saída e realimentar como tensão na entrada ($b = V_2/V_1 = H_{21}$) usamos esta matriz. O termo H_{12} é sempre desprezado.

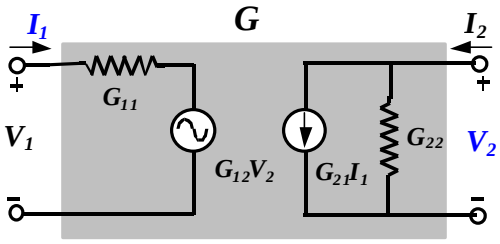
Logo abaixo, mostramos um resumo de todas as quatro matrizes. As variáveis em cor azul representam as variáveis independentes do quadripolo. O parâmetro em vermelho representa a transferência direta do quadripolo. O parâmetro na cor verde é desprezado na análise de sistemas realimentado.

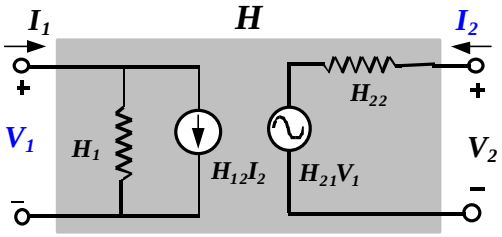




$Y_{11} = I_1/V_1 \big|_{V2=0}$ $Y_{12} = I_1/V_2 \big|_{V1=0}$ $Z_{11} = V_1/I_1 \big|_{I2=0}$ $Z_{12} = V_1/I_2 \big|_{I1=0}$

$Y_{21} = I_2/V_1 \big|_{V2=0}$ $Y_{22} = I_2/V_2 \big|_{V1=0}$ $Z_{21} = V_2/I_1 \big|_{I2=0}$ $Z_{22} = V_2/I_2 \big|_{I1=0}$





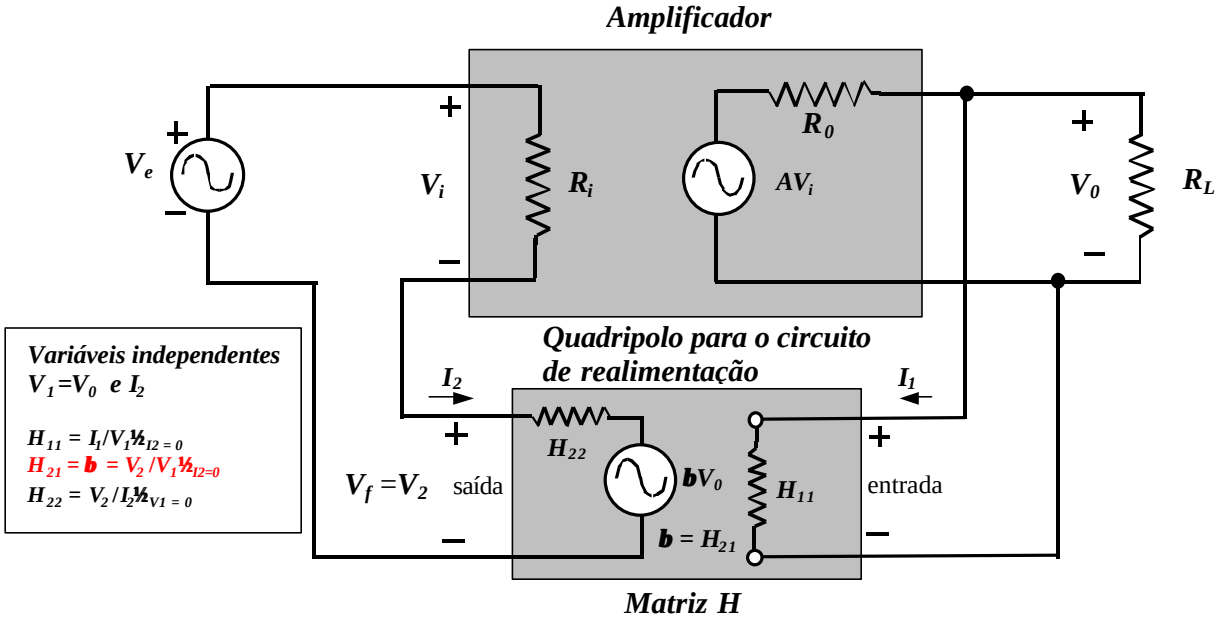
$G_{11} = V_1/I_1 \big|_{V2=0}$ $G_{12} = V_1/V_2 \big|_{I1=0}$ $H_{11} = I_1/V_1 \big|_{I2=0}$ $H_{12} = I_1/I_2 \big|_{V1=0}$

$G_{21} = I_2/I_1 \big|_{V2=0}$ $G_{22} = I_2/V_2 \big|_{I1=0}$ $H_{21} = V_2/V_1 \big|_{I2=0}$ $H_{22} = V_2/I_2 \big|_{V1=0}$

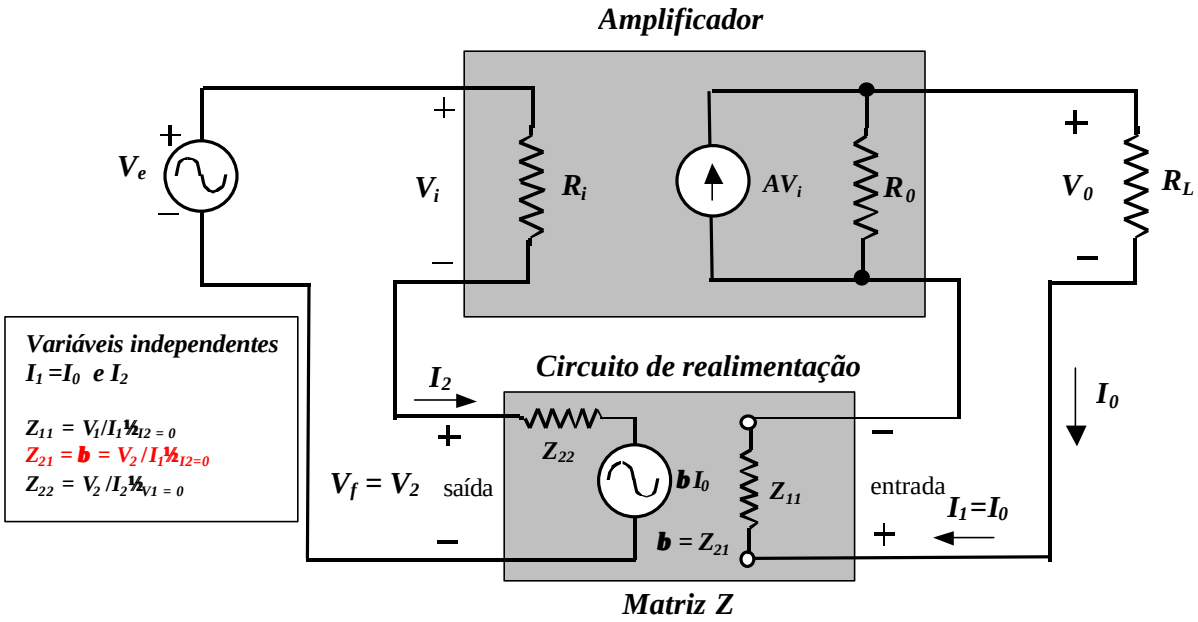
Note que em termos de transferência direta (termos em vermelho) temos

Matriz Y -------- converte tensão em corrente
Matriz Z -------- converte corrente em tensão
Matriz G ------- converte corrente em corrente
Matriz H ------- converte tensão em tensão

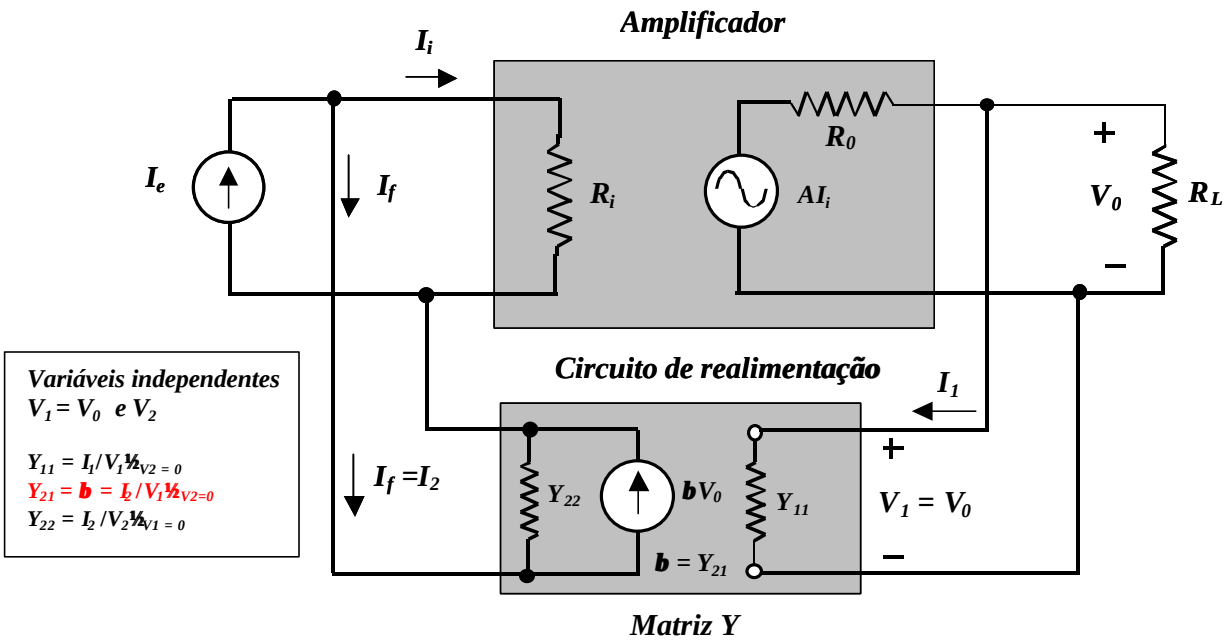
A seguir mostramos cada uma das conexões de realimentação com o circuito de realimentação na forma de quadripolo (já com o termo reverso suprimido).



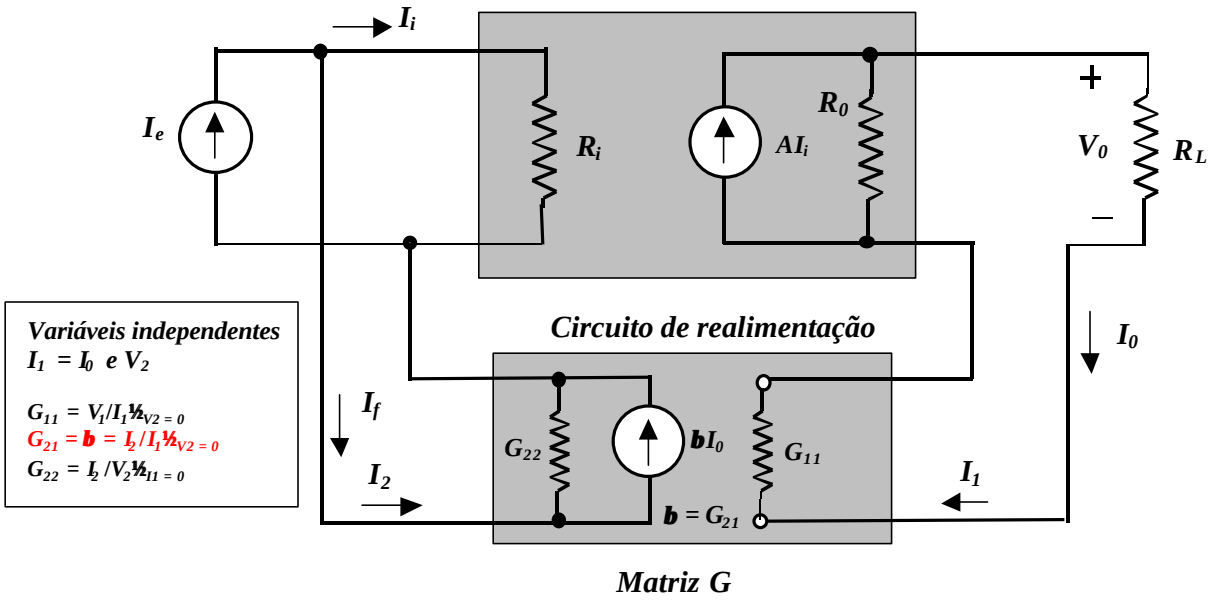
Realimentação de tensão em série



Realimentação de corrente em série



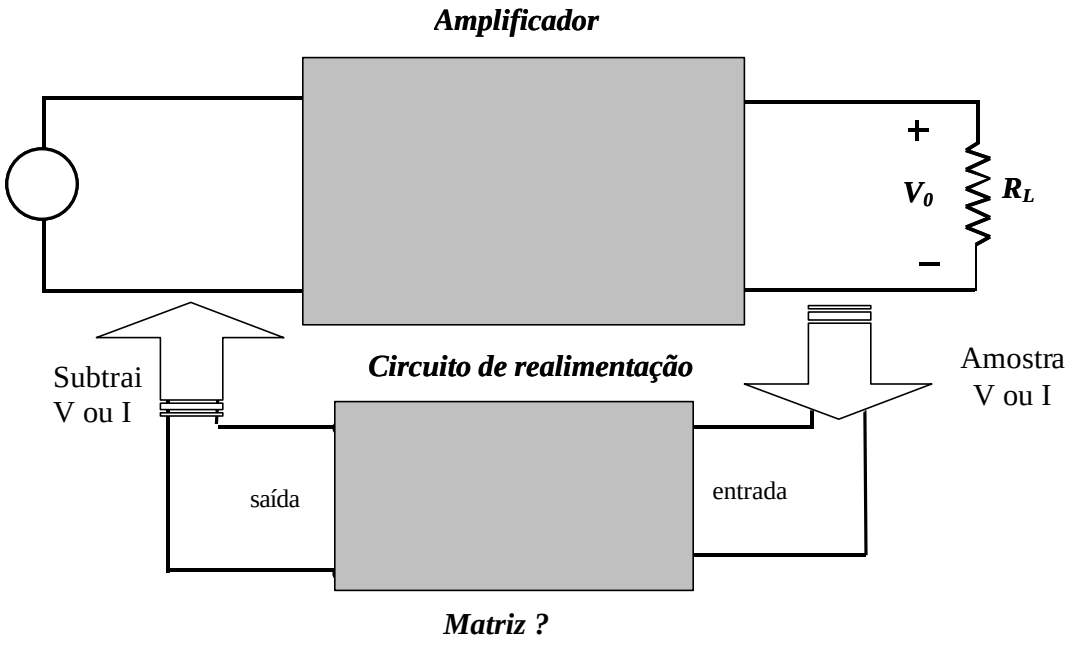
Realimentação de tensão em paralelo



Realimentação de corrente em paralelo

Da observação dos vários tipos de realimentação e quadripolos mostrados acima, podemos resumir na figura abaixo como devemos escolher que tipo de matriz para o circuito de realimentação.

Obs: Na verdade mais importante que saber o tipo da matriz é saber quais são as variáveis independentes.



A figura acima mostra que o circuito de realimentação pode ter como entrada e saída tensão ou corrente.

O tipo de variável na entrada e saída no circuito de realimentação determina que variável devemos utilizar como variável independente para determinação dos parâmetros dos quadripolos. Por exemplo, se a entrada no circuito de realimentação for tensão e a saída for corrente, as variáveis independentes são, V_1 e V_2, isto é, as tensões de entrada e saída. De uma forma geral, podemos os resumir a escolha das variáveis independente como mostrado na tabela abaixo.

Escolha das variáveis independentes

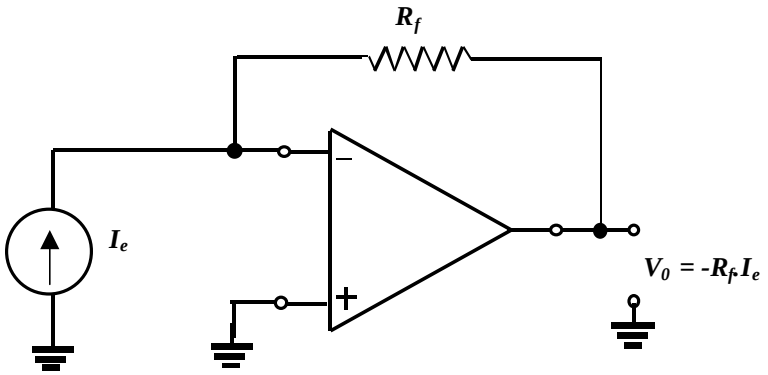
Tipo de Conexão	*Variável de entrada (quadripolo)*	*Variável de saída (quadripolo)*	***Variáveis independentes***
Tensão em série	$V_1 = V_0$	$V_2 = V_f$	V_1, I_2 **(matriz H)**
Tensão em paralelo	$V_1 = V_0$	$I_2 = I_f$	V_1, V_2 **(matriz Y)**
Corrente em série	$I_1 = I_0$	$V_2 = V_f$	I_1, I_2 **(matriz Z)**
Corrente em paralelo	$I_1 = I_0$	$I_2 = I_f$	I_1, V_2 **(matriz G)**

Como pode ser observado na tabela, as variáveis independentes são formadas pela variável de entrada amostrada (V_1 ou I_1) e a variável de saída que não a de realimentação

Exemplo 1:

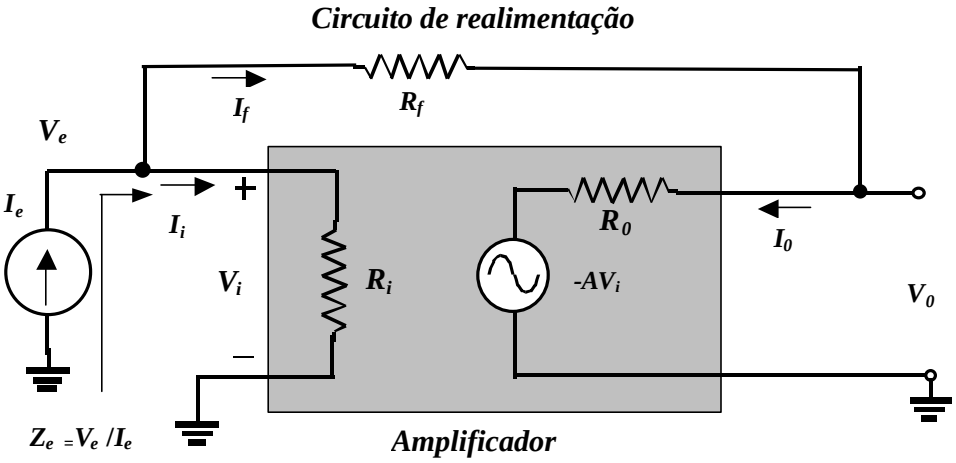
- ***Conexão realimentação de tensão em paralelo***

A figura abaixo um circuito de um conversor corrente tensão com o uso de opamp. O opamp apresenta uma impedância de entrada, R_i, uma impedância de saída, R_0, e um ganho de tensão, A. Determine a impedância de entrada, a impedância de saída e o ganho de transimpedância do sistema realimentado, (V_0/I_e) com uma análise direta e utilizando os conceitos de realimentação descritos acima.



Conversor corrente tensão (amplificador de transimpedância)

- ***Análise direta***



Modelo do conversor corrente tensão

Da figura temos

$$I_e = I_i + I_f = V_i/R_i + I_f \qquad (423)$$

$$I_f = (V_i - V_0)/R_f \qquad (424)$$

Substituindo a equação (424) em (423), resulta

$$I_e = V_i/R_i + (V_i - V_0)/R_f = V_i(1/R_i + 1/R_f) - V_0/R_f \qquad (425)$$

Temos ainda

$$V_0 = R_0 I_o - AV_i = R_0 I_f - AV_i = (V_i - V_0)R_0/R_f - AV_i$$

$$V_0 (1+R_0/R_f) = (R_0/R_f - A)V_i$$

$$V_0 = (R_0/R_f - A)\, R_f/(R_0 + R_f)V_i \qquad (426)$$

e

$$V_i = V_e \qquad (427)$$

Substituindo (427) e (426) em (425), resulta

$$I_e = V_e(1/R_i + 1/R_f) - (R_0/R_f - A)/(R_0 + R_f)V_e$$

$$I_e = V_e[1/R_i + 1/R_f - (R_0/R_f - A)/(R_0 + R_f)]$$

Portanto

$$Z_e = V_e/I_e = 1/[1/R_i + 1/R_f - (R_0/R_f - A)/(R_0 + R_f)]$$

$$Z_e = R_i//R_f\, 1/[1+T] \qquad (428)$$

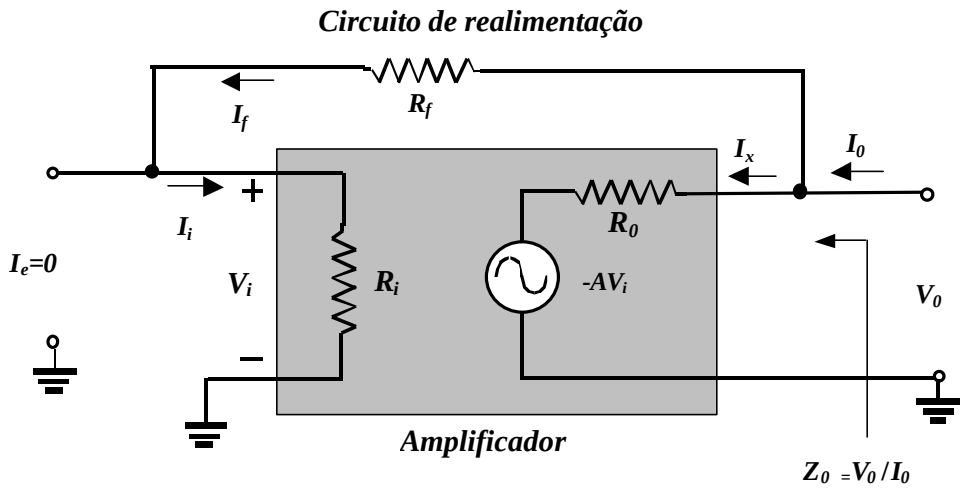
onde $T = (A - R_0/R_f)R_f R_i/(R_f+R_0)(R_f+R_i)$

Note que como na prática a condição $A >> R_0//R_f$ *é sempre verdadeira. Logo*

$$T \approx AR_f R_i/(R_f+R_0)(R_f+R_i) \qquad (429)$$

Obs: Mais adiante comentaremos sobre o termo – R_0/R_f

Para o calculo da impedância de saída vamos nos reportar a figura abaixo.



Da figura acima, temos

$I_0 = I_x + I_f = I_x + I_i$ (430)

$V_0 = R_0 I_x - AV_i = R_0 I_x - AR_i I_i$ *e* (431)

$V_0 = R_f I_f + R_i I_i = (R_f + R_i) I_i$ (432)

Eliminando I_i *em (430) e em (431)*

$I_0 = I_x + V_0/(R_f + R_i)$ *e* (433)

$V_0 = R_0 I_x - AR_i V_0/(R_f + R_i)$

$V_0 [1+AR_i /(R_f + R_i)] = R_0 I_x$

Eliminando I_x *em (433)*

$I_0 = V_0 \{[1+AR_i /(R_f + R_i)]/R_0 + 1/(R_f + R_i)\}$

Portanto

$Z_0 = V_0/ I_0 = 1/\{[1+AR_i /(R_f + R_i)]/R_0 + 1/(R_f + R_i)\}$

$Z_0 = R_0//R_f ./G$

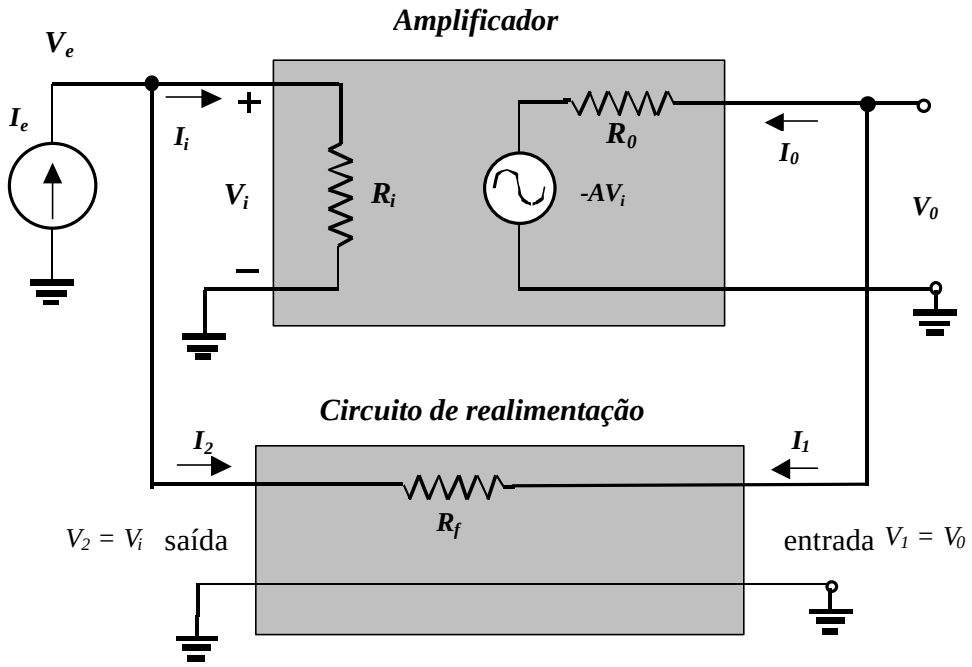
Onde $G = R_f/(R_0 + R_f)\{1+R_0/(R_f + R_i)\} + T$ *onde T é dado por (429)*

Como na prática sempre $R_f >> R_0$

Então $G @ 1 + T$ *e* $Z_0 = R_0//R_f ./(1+T)$ (434)

- ***Análise indireta***

Nesta análise vamos redesenhar o circuito de forma que o circuito de realimentação fique mais explícito.



➢ *Identificando as variáveis independentes do quadripolo*

Da figura vemos que a variável amostrada é $V_1 = V_0$ e a variável a ser realimentada é I_2. Portanto as variáveis independentes são V_1 e V_2.

Os parâmetros do quadripolo são:

Por inspeção

$$Y_{11} = I_1/V_1 \big|_{V2=0} = 1/R_f$$

Por inspeção

$$Y_{21} = I_2/V_1 \big|_{V2=0} = -1/R_f$$

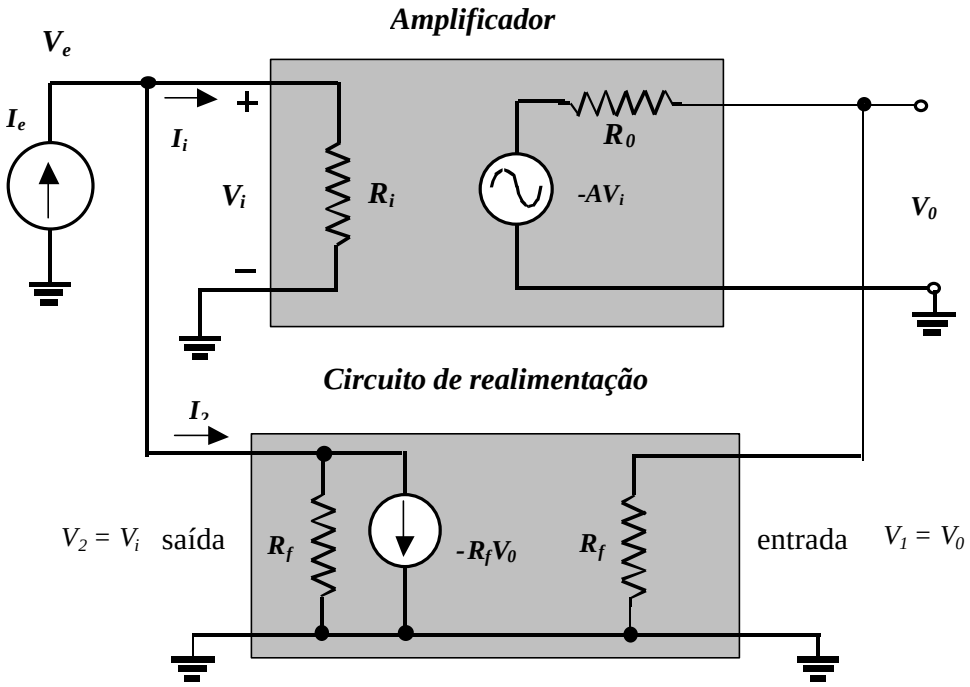
Por inspeção

$$Y_{22} = I_2/V_2 \big|_{V1=0} = 1/R_f$$

desprezado

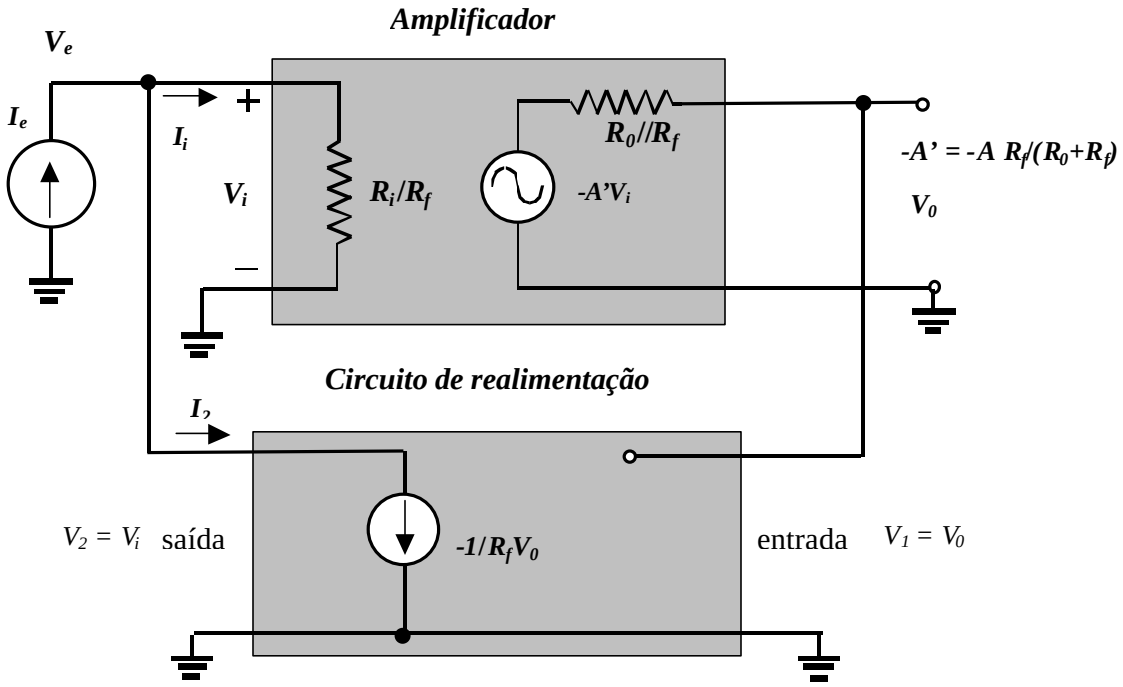
$$\boxed{Y_{12} = I_1/V_2 \big|_{V1=0} = -1/R_f}$$

Para deixar mais claro vamos repetir a figura acima com os parâmetros do quadripolo equivalente.



Amplificador com o quadripolo do circuito de realimentação

Eliminando o efeito de carregamento pela inclusão de R_f no circuito amplificador, podemos redesenhar o circuito acima como mostrado abaixo.



Amplificador com o quadripolo do circuito de realimentação equivalente

Note que $-A'V_i = -A'R_i//R_f\ I_i = -A_I.I_i$ *onde* $A_I = A'R_i//R_f$

O fator de realimentação é igual a $b = -1/R_f$.

Portanto do fator $1+bA$, *pode ser agora determinado.*

$$1+bA = 1 + (-1/R_f)(-A_I) = 1+ 1/R_f\ A'R_i//R_f = 1+ AR_fR_i/(R_f+R_0)(R_f+R_i)$$

ou, da análise direta, $T = AR_fR_i/(R_f+R_0)(R_f+R_i)$, *assim*

$$1+bA = 1+ AR_fR_i/(R_f+R_0)(R_f+R_i) = 1+T$$

As impedâncias de entrada e de saída são dadas por

$$Z_e = R_i//R_f\ /(1+T)$$

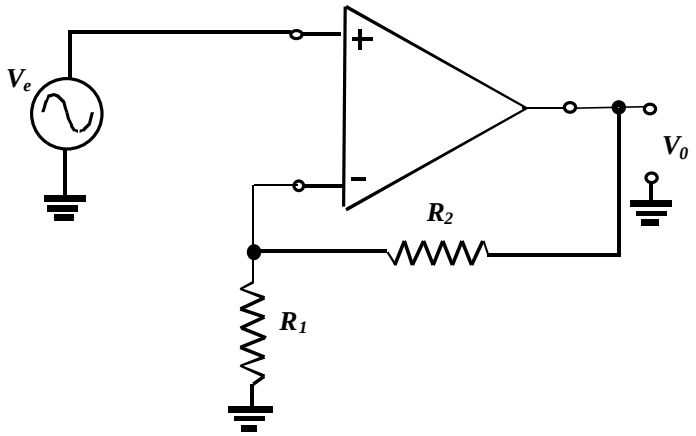
$$Z_0 = R_0//R_f\ /(1+T)$$

Que é exatamente igual ao resultado obtido na análise direta com aproximação. A diferença entre as duas análises deve-se ao fato de desprezarmos o termo reverso do quadripolo.

Exemplo 2:

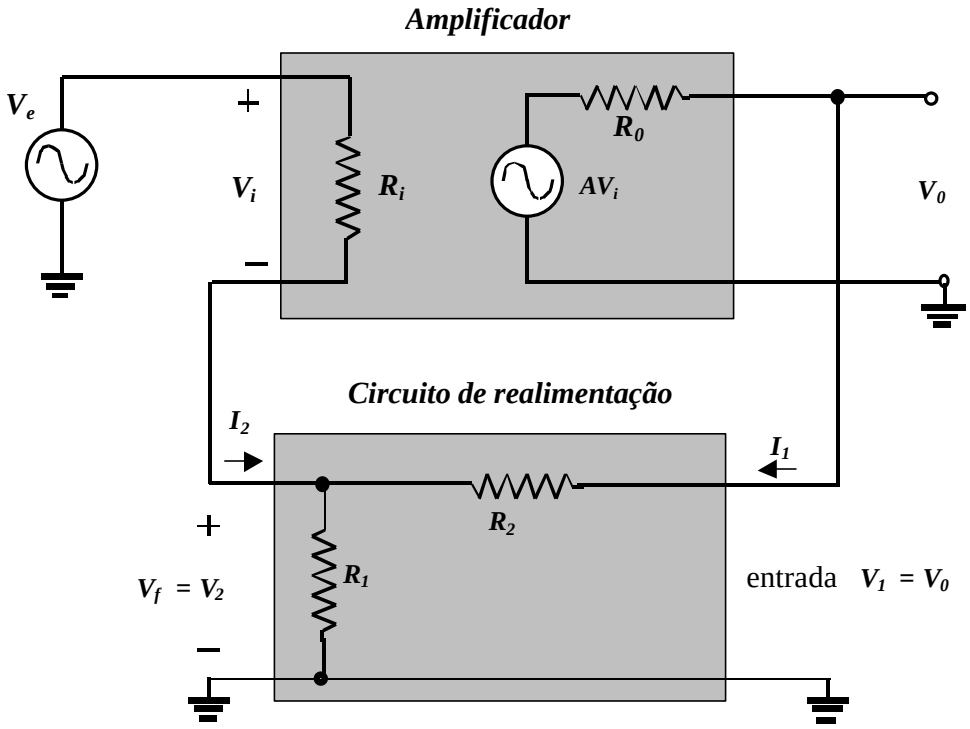
- ***Conexão realimentação de tensão em série***

A figura abaixo um circuito de um amplificado não inversor com o uso de opamp. O opamp apresenta uma impedância de entrada, R_i, *uma impedância de saída,* R_0, *e um ganho de tensão, A. Determine a impedância de entrada, a impedância de saída e o ganho do sistema realimentado,* (V_0/V_e) *utilizando os conceitos de realimentação.*



Amplificador não inversor

A figura abaixo mostra o amplificador não inversor com o modelo do opamp.



Circuito equivalente do amplificador não inversor

- *Identificando as variáveis independentes do quadripolo*

Da figura vemos que a variável amostrada é $V_1 = V_0$ e a variável a ser realimentada é V_2. Portanto as variáveis independentes são V_1 e I_2.

Os parâmetros do quadripolo são:

Por inspeção

$$H_{11} = I_1/V_1 \big|_{I2=0} = 1/(R_2+R_1)$$

Por inspeção

$$H_{21} = V_2/V_1 \big|_{I2=0} = R_1/(R_2+R_1)$$

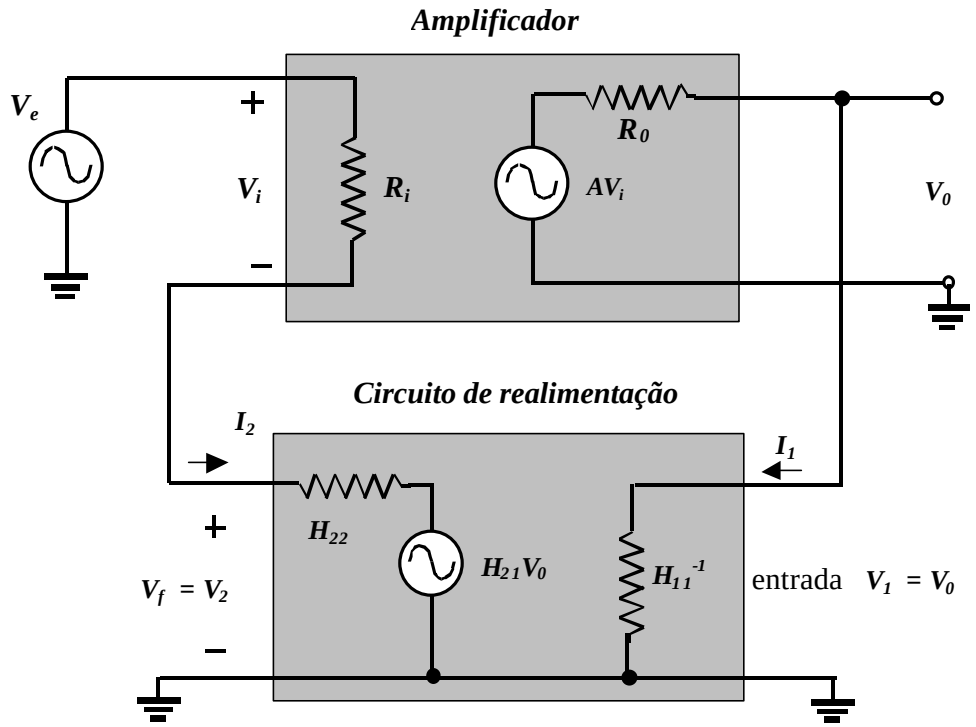
Por inspeção

$$H_{22} = V_2/I_2 \big|_{V1=0} = R_2 // R_1$$

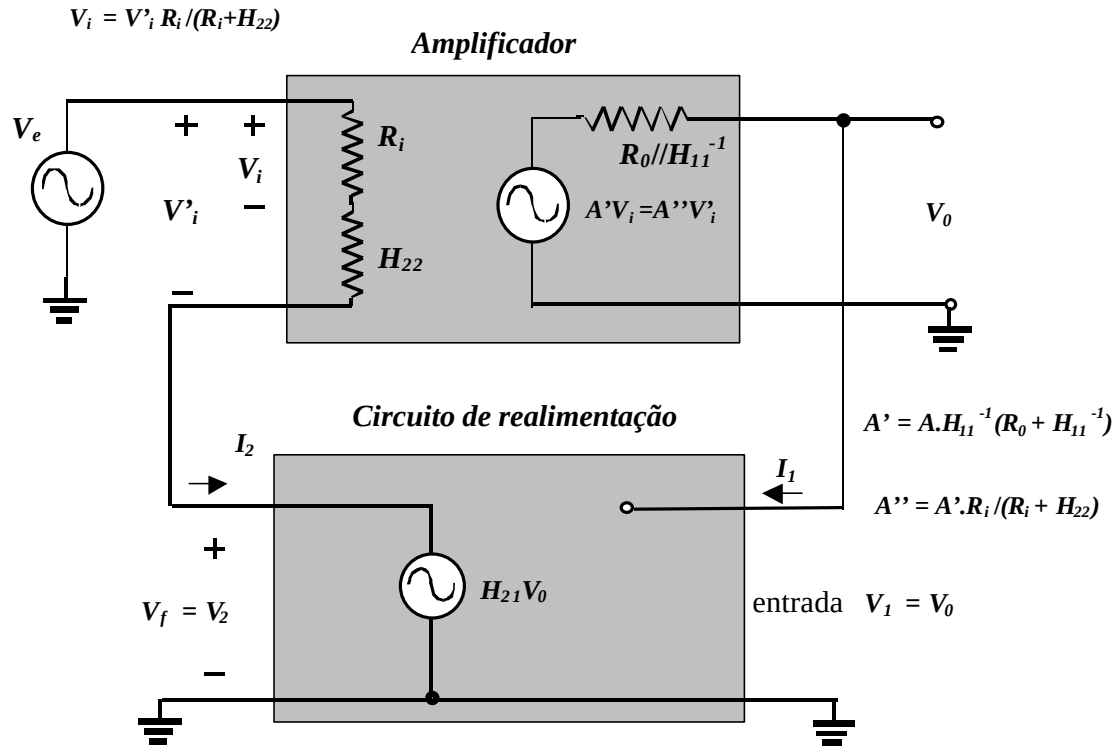
desprezado

$$\boxed{H_{12} = I_1/I_2 \big|_{V1=0} = -R_2/(R_2+R_1)}$$

A figura abaixo mostra o circuito equivalente com os parâmetros do quadripolo.



A figura abaixo mostra o circuito equivalente pela eliminação do efeito de carregamento.



Circuito equivalente

Portanto o fator de realimentação é igual a

$$1+bA = 1+H_{21}A'' = 1 + R_1/(R_1+R_2)\, A'.R_i/(R_i + H_{22}) =$$

$$= 1+ R_1/(R_1+R_2)\, A.H_{11}^{-1}(R_0 + H_{11}^{-1})\, R_i/(R_i + H_{22}) =$$

$$= 1+ R_1/(R_1+R_2)\, A.(R_2+R_1)\,(R_0 + R_2+R_1)\, R_i/(R_i + R_1//R_2)$$

$$1+bA = 1+ R_1A.\,(R_0 + R_2+R_1)\, R_i/(R_i + R_1//R_2)$$

Logo a impedância de entrada é igual a

$$Z_e = (R_i + H_{22})(1+bA) = (R_i + R_1//R_2)/(1+bA)$$

e a impedância de saída é igual a

$$Z_0 = (R_0 + H_{11}^{-1})/(1+bA) = (R_0+R_1+R_2)/(1+bA)$$

Se os efeitos de carregamento forem desprezados

$$1+bA \gg 1+(R_1/(R_1+R_2)\, A$$

e o ganho de malha fechada , A_v

$A = \infty$

$$A_v = V_0/V_e = A/(1+bA) \gg 1/b = 1+R_2/R_1$$

O que já é bem conhecido para o amplificador não inversor.